<u>Вказівки до розв'язків</u>

ІІ етап Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

2017

Звертаємо увагу, що пропоновані матеріали є вказівками до розв'язання задач ІІ етапу олімпіади з математики і не містять повного обґрунтування. Окрім того учні можуть знайти розв'язок, якій відрізняється від запропонованого.

6 клас

1.Голодний П'ятачок і Вінні-Пух з'їли торт і стали ситими. Відомо, що голодний Вінні-Пух легший від ситого П'ятачка, а ситий Вінні-Пух важить стільки ж, скільки два голодних П'ятачка. Що важить більше: торт чи голодний П'ятачок? Чому?

Відповідь: торт важить більше ніж голодний П'ятачок.

2.Який із двох виразів більший:

$$\frac{1}{4}+\frac{7}{8}+\frac{1}{16}+\frac{31}{32}+\frac{1}{64}+\frac{127}{128}+\frac{1}{256}+\frac{511}{512} \quad \text{чи}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{15}{16}+\frac{1}{32}+\frac{63}{64}+\frac{1}{128}+\frac{255}{256}+\frac{1}{512}?$$

Відповідь: перший вираз більший.

Розв'язання: Підрахувати, який із виразів більший, можна безпосередньо, звівши обидва до спільного знаменника. А можна зробити інакше — згрупувати доданки у другому виразі в пари:

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{15}{16}+\frac{1}{32}+\frac{63}{64}+\frac{1}{128}+\frac{255}{256}+\frac{1}{512}=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{15}{16}+\frac{1}{32}\right)+\left(\frac{63}{64}+\frac{1}{128}\right)+\left(\frac{255}{256}+\frac{1}{512}\right)=$$

$$=\frac{7}{8}+\frac{31}{32}+\frac{127}{128}+\frac{511}{512}.$$

Оскільки перший вираз складається із тих самих чотирьох доданків, але крім них містить іще й чотири інших доданки, він є більшим за другий вираз

3. Підприємець Петро купив на оптовому ринку партію ручок і пропонує покупцям або одну ручку за 5 гривень, або три ручки за 10 гривень. Від кожного покупця він отримує однаковий прибуток. Яка оптова ціна ручки?

Відповідь: оптова ціна ручки – 2 грн. 50 коп.

Розв'язання: Якщо оптова ціна ручки – x грн., то 5–x=10–3x, тоді x=2,5.

4. У родині 4 особи. Якщо Марійці підвищити стипендію удвічі, то загальний прибуток усієї родини зросте на 5%, якщо замість цього мамі підвищити зарплату удвічі, то – на 15%, а якщо ж підвищити удвічі зарплату татові, то – на 25%. На скільки відсотків зросте прибуток усієї родини, якщо підвищити удвічі пенсію дідусеві?

Відповідь: 55%.

Розв'язання. Якщо Марійці підвищити стипендію удвічі, то прибуток усієї родини зросте на розмір цієї стипендії. Отже, стипендія Марійки складає 5% прибутку усієї родини, відповідно, мамина зарплата складає 15%, а татова – 25%. Частина, що залишилась 100%–5%–15%–25%=55% припадає на дідусеву пенсію. Тоді, якщо його пенсія збільшиться у два рази, прибуток всієї родини зросте на 55%.

5. Складіть із цифр1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9(кожну цифру можна використовувати лише один раз) три трицифрові числа так, щоб сума двох чисел дорівнювала третьому, і при цьому в одного з цих чисел цифра десятків була 8. Достатньо навести приклад.

Відповідь: $214 + 569 = 783$

7 клас

1. В двох цистернах було порівну води. Кількість води в перший цистерні спочатку зменшили на 10 %, а потім збільшили на 10 %. Кількість води у другій цистерні спочатку збільшили на 10 % , а потім зменшили на 10 %. В який цистерні стало більше води?

Вказівка: Позначимо початкову кількість води в кожній з двох цистерн через а. В першій цистерні після зменшення кількості води на 10% її стало 0,9а; після збільшення на 10% води стало 0,9а + 0,09а = 0,99а…

2. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, написали в кінці числа. Нове число на 216 менше, ніж початкове. Яке було початкове число?

Відповідь: 975

Розв'язання: $\overline{9ab} = \overline{ab9} + 216$, $900 + 10a + b = 100a + 10b + 9 + 216 \Rightarrow$ $10a + b = 75 \Rightarrow a = 7, b = 5$.

3. У Нептуна служать восьминоги у яких шість, сім, або вісім ніг. Ті, що мають 7 ніг, завжди брешуть, а ті, що мають 6 або 8 ніг завжди говорять правду. Зустрілися чотири восьминоги. Синій сказав: «Разом у нас 28 ніг», зелений: «Разом у нас 27 ніг», жовтий: «Разом у нас 26 ніг», червоний: «Разом у нас 25 ніг». У кого скільки ніг?

Відповідь: У зеленого – 6 ніг, а у інших – по 7 ніг.

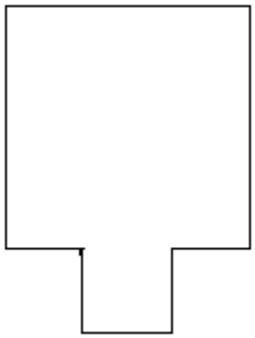
Розв'язання: Оскільки всі восьминоги суперечать друг другу, то можливі два варіанти: або всі брешуть, або рівно один говорить правду, а інші – брешуть. Якщо всі восьминоги брешуть, то у кожного з них по 7 ніг, а разом – 28 ніг, тобто синій сказав правду – протиріччя. Якщо три восьминоги брешуть, а один сказав правду, то у тих, що збрехали по 7 ніг, а того, що сказав правду – або 6, або 8 ніг. Тому разом у них або 27 ніг, або 29, тобто правду сказав зелений восьминіг. Таким чином, у зеленого восьминога 6 ніг, а у інших – по 7 ніг.

4.Відновити запис множення

		*	2	*
			*	7
		*	*	*
*	*	*	*	
*	*	*	*	8

Відповідь: $124 \times 97 = 12028$

5. Парк має форму квадрата, до якого приєднали квадратну ділянку (мал.1). При цьому периметр парку збільшився на 10%. На скільки відсотків збільшилась площа парку?



Мал.1

Відповідь: 4%.

.

8клас

1.У клітці було 5 папуг. Їх середня ціна становить 6000 доларів. Одного разу при чистці клітки втік один найгарніший папуга. Середня ціна тих, що залишилися, 5000 доларів. Визначте ціну папуги, який втік із клітки.

Відповідь: 10000 доларів.

Вказівка: Загальна сума цін папуг, що були в клітці, складає $6000 \cdot 5 = 30000$ доларів. Та ціна папуг, що залишилися в клітці, складає $5000 \cdot 4 = 20000$ доларів. Отже, ціна папуги, що вилетів з клітки, складає 10000 доларів.

2. Довести, що вираз $(x–1)\cdot(x–3)\cdot(x–4)\cdot(x–6)+10$ набуває додатних значень при всіх значеннях x.

Довести, що вираз набуває додатних значень при всіх значеннях x.

Доведення.

$(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10=(x-1)(x-6)(x-3)(x-4)+10=(x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10=$

$=\left|x^2-7x+6=t\right|=t\cdot(t+6)+10=t^2+6t+10=(t+3)^2+1=(x^2-7x+9)^2+1>0$ при довільних значеннях x.

3. Чи існує трицифрове число, яке дорівнює добутку своїх цифр?

Доведення. Припустимо, що існує тризначне число $\overline{abc}$, для якого виконується рівність $\overline{abc}=a\cdot b\cdot c$. Маємо $\overline{abc}=100a+10b+c\geq 100a$. Тоді $a\cdot b\cdot c\geq 100a$. Отже, $bc\geq 100$. Але b та c – цифри, тому $b\leq 9, c\leq 9$ і $bc\leq 81$. Одержане протиріччя показує, що такого трицифрового числа не існує.

4.Чому дорівнює x-y, якщо

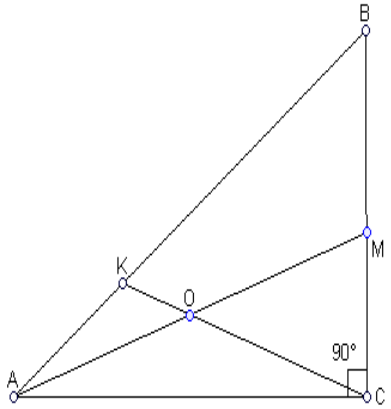
$x=1^2+2^2+3^2...+2018^2$, $y=1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+...+2017\cdot 2019$?

Розв'язання: $x=(2-1)(2+1)+(3-1)(3+1)+(4-1)(4+1)+...+(2018-1)(2018+1)=$

$=2^2-1^2+3^2-1^2+4^2-1^2+...+2018^2-1^2=2^2+3^2+4^2+...+2018^2-\left(\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017}\right)$

Тоді,

$x-y=\underbrace{1+1+1+...+1}_{2017}=1+2017=2018$



5. На гіпотенузі АВ прямокутного трикутника АВС вибрана точка К, для якої СК = ВС. Відрізок СК перетинає бісектрису АМ в її середині. Знайти кути трикутника АВС.

Відповідь: $36^\circ, 54^\circ$.

Розв'язання: Позначимо точку перетину відрізків CK і AM за O (див. мал.). Замітимо, що CO - медіана, що проведена до гіпотенузи

прямокутного трикутника ACM. $AO = OC = OM$, а $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK = \alpha$. Тоді $\angle A = 2\alpha$. Знайдемо $\angle B$. ΔCBK - рівнобічний, то цей кут дорівнює зовнішньому куту CKB трикутника CKA, тобто $\angle B = \angle ACK + \angle KAC = 3\alpha$. З того, що $\angle B + \angle A = 90^\circ$ маємо: $2\alpha + 3\alpha = 90^\circ$, $\alpha = 18^\circ$. $\angle B = 3 \cdot 18^\circ = 54^\circ$, $\angle A = 36^\circ$.

9клас

1.В лісі росли сосни, кедри та ялинки, причому на всіх деревах було порівну шишок. Подув легкий вітерець, і декілька шишок упало на землю. виявилось , що з кожної сосни упало рівно11% її шишок, з кожного кедра – рівно 54%, а з кожної ялинки – рівно 97%. При цьому з усіх дерев разом упало рівно 30% усіх шишок. Доведіть, що кількість дерев у лісі ділиться на 43.

Розв'язання: Нехай m, n, k – кількість сосен, кедрів та ялин відповідно. Тоді $11m + 54n + 97k = 30(m + n + k)$. Віднімемо від обох частин $54(m + n + k)$: $-43m + 43k = -24(m + n + k)$. Тепер видно, що $m + n + k$ і справді ділиться на 43.

2. Розв'язати рівняння: $x^2 \cdot (x-2)^2 - 3 \cdot (x-1)^2 - 1 = 0$

Відповідь: 1; $1 \pm \sqrt{5}$.

Приведемо рівняння до вигляду: $(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x + 1) - 1 = 0$;

$(x^2 - 2x)^2 - 3(x^2 - 2x) - 4 = 0$; введемо заміну: $x^2 - 2x = t$, отримаємо рівняння:

$t^2 - 3t - 4 = 0$, звідки $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 4; \end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = 0, \\ x^2 - 2x - 4 = 0; \end{array}\right.$ звідки $x_1 = 1$, $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$.

3. Від'ємні числа a, b, c, d задовольняють такі умови: $a = b + 2c$, $a + c = b + d$, $b = d + c$. Яке число більше: a чи c?

Відповідь: $a < c$.

Розв'язання: Виразимо b із кожного з трьох рівнянь:

$$b = a - 2c = a + c - d = d + c.$$

Тоді $a - 2c = a + c - d \Rightarrow d = 3c$, а також $a - 2c = d + c \Rightarrow a = d + 3c = 6c$. Оскільки всі числа від'ємні, $a = 6c < c$.

Зауважимо, що набір чисел, які задовольняють умову, існує: приміром, $a = -6$, $b = -4$, $c = -1$, $d = -3$.

4. У супермаркеті три поверхи, переміщуватися між якими можна тільки ліфтом. Дослідження відвідуваності поверхів супермаркету показало, що з початку робочого дня і до закриття магазину:

а) з покупців, що входять у ліфт на другому поверсі, половина їде на перший поверх, а половина – на третій;

б) серед покупців, які виходять з ліфта на третьому поверсі, менше третини.

На який поверх покупці частіше їздили з першого поверху, на другий чи на третій?

Відповідь: з першого поверху на третій за цей день приїхало менше покупців, ніж з першого на другий.

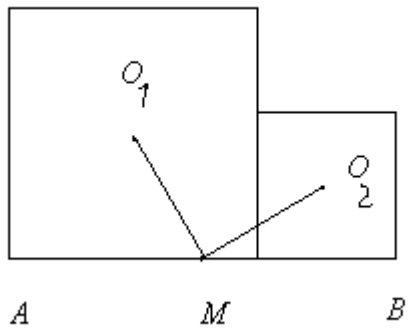
Вказівки:

Припустимо, що за весь день на першому поверсі в ліфт увійшло x покупців, на другому - y, на третьому - z. Зауважимо, що кількість покупців, які вийшли з ліфта на кожному з поверхів, дорівнює кількості покупців, які увійшли на цьому ж поверсі.

За умовою, з покупців, які увійшли у ліфт на другому поверсі, половина їде вниз, а половина - вгору. Значить, з другого поверху на третій їде $y / 2$ покупців, і стільки ж з другого на перший. Другу умову можна записати так: $z < (x + y + z) / 3$. Це рівносильно тому, що $2z < x + y$.

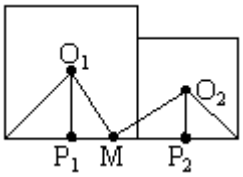
З першого поверху на третій за день було $z - (y / 2)$ поїздок, тому що за день на третьому поверсі вийшли з ліфта z покупців, а $y / 2$ з них приїхали з другого поверху. А з першого на другий піднімалися ті покупці, які входили в ліфт на першому поверсі і хто не їхав на третій поверх, тобто $x - (z - (y / 2))$. Для розв'язання задачі треба порівняти ці два вирази. Але нерівність $z - (y / 2) < x - (z - (y / 2))$ рівносильна вже доведеної нерівності $2z < x + y$. Отже ми довели, що з першого поверху на третій за цей день приїхало менше покупців, ніж з першого на другий.

5. Два квадрата розташовані так, як показано на малюнку. Нехай точка M – середина відрізка AB, а точки O1 і O2 – центри квадратів. Доведіть, що відрізки MO1 і MO2 рівні і знайдіть кут між



ними.

Вказівка. З'єднаємо центри квадратів з вершинами і опустимо з них перпендикуляри на основи. Тепер можна довести, що прямокутні трикутники O1P1M і MP2O2 рівні. Тому рівні їх гіпотенузи O1M і MO2, і



кут між ними прямий.

10клас

1. Числа $5x-y,\ 2x+3y\ \ i\ \ x+2y$ утворюють арифметичну прогресію, а числа $(y+1)^2$, $x\cdot y+1$ і $(x-1)^2$ утворюють геометричну прогресію. Знайти x та y.

Відповідь: $\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$; $(0;0)$; $(-0,75;-0,3)$.

Розв'язання: Використовуючи основну властивість арифметичної прогресії запишемо: $(x+2y)+(5x-y)=2(x+3y)$. Аналогічно, за основною властивістю геометричної прогресії, маємо $(x-1)^2(y+1)^2=(xy+1)^2$.

Отримали систему: $\begin{cases} x+2y+5x-y=4x+6y, \\ (x-1)^2(y+1)^2=(xy+1)^2; \end{cases}$ ця система розпадається на дві:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 6x+y=4x+6y, \\ (x-1)(y+1)=xy+1; \end{cases} \\ \begin{cases} 6x+y=4x+6y, \\ (x-1)(y+1)=-xy-1; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2,5y, \\ y=1\frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=2,5y, \\ 5y^2+1,5y=0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3\frac{1}{3}, \\ y=1\frac{1}{3}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=-0,75, \\ y=-0,3. \end{cases} \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left(3\frac{1}{3};1\frac{1}{3}\right)$; $(0;0)$; $(-0,75;-0,3)$.

2. Обчисліть значення виразу: $\dfrac{\sqrt{43-24\sqrt{3}}+1}{\sqrt{3}-1}$

Відповідь: 3.

Розв'язання: $\dfrac{\sqrt{43-24\sqrt{3}}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{\sqrt{(3\sqrt{3}-4)^2}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{|3\sqrt{3}-4|+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{3\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-1}=3$

3. Знайти дійсні значення параметра a, при яких нерівність $x^2-|a+1|x+a+1>0$ справедлива для всіх тих значень x, які задовольняють нерівність $|x|<1$.

Відповідь: $a>-1$.

Розв'язання: Дискримінант квадратного тричлена дорівнює: $D=(a+1)^2-4(a+1)=(a+1)(a-3)$. Розглянемо можливі випадки:

1) $D<0$, тобто $-1<a<3$. Розв'язком нерівності є всі дійсні числа, зокрема й такі, що $|x|<1$.

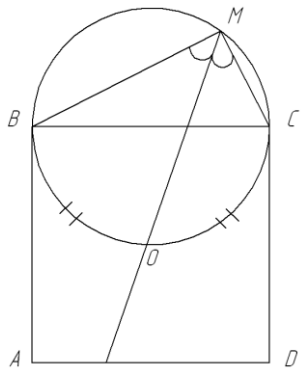
2) $D=0$, тобто $a=-1$, або $a=3$. У випадку $a=-1$, $x^2>0$ для всіх x, крім $x=0$, який входить у розв'язок нерівності $|x|<1$, тобто $a=-1$ не задовольняє умові. Якщо $a=3$, то $x^2-4x+4>0$, $(x-2)^2>0$ для всіх x, крім $x=2$, що не входить до розв'язків нерівності $|x|<1$, тобто $a=3$ задовольняє умові задачі.

3) $D>0$, $a<-1$, або $a>3$. У випадку $a<-1$, розв'язок нерівності $\left(-\infty;\frac{-a-1-\sqrt{D}}{2}\right)\cup\left(\frac{-a-1+\sqrt{D}}{2};+\infty\right)$ не задовольняє розв'язку нерівності $|x|<1$. При $a>3$ розв'язок нерівності $\left(-\infty;\frac{a+1-\sqrt{D}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+1+\sqrt{D}}{2};+\infty\right)$ задовольняє нерівності $|x|<1$.

4. Чи існують такі натуральні числа *a*, *b* і *c*, що у кожного з рівнянь $ax^2+bx+c=0$, $ax^2+bx-c=0$, $ax^2-bx+c=0$, $ax^2-bx-c=0$ обидва кореня – цілі?

Розв'язання. Так, наприклад: $a=1$, $b=5$, $c=6$.

5. На стороні квадрата зовні побудовано прямокутний трикутник, гіпотенуза якого збігається зі стороною квадрата. Довести, що бісектриса прямого кута цього трикутника поділяє площу квадрата навпіл.



Доведення. Якщо АВСД – даний квадрат, а ВМС – прямокутний трикутник, то коло , яке описано навколо трикутника ВМС, проходить через точку О – центр квадрата. А оскільки ВО=ОС, то й бісектриса кута ВМС також проходить через т. О. Отже, вона поділяє площу квадрата навпіл.

11клас

1. Вкладник поклав 2017 грн. в банк на 10 років. В якому випадку він отримає більше грошей: якщо раз в році йому нараховуватимуть 12 % від суми на рахунку чи якщо кожний місяць йому нараховуватимуть 1% від суми на рахунку ?

   Відповідь. При нарахуванні щомісяця 1%, вкладник отримає за 10 років більше, ніж при щорічному нарахуванні 12%.

2.Перша цифра деякого шестицифрового числа 1. Якщо її поставити в кінець числа (інші цифри залишаються без змін), то отримане число в тричі більше за початкове число. Знайдіть ці числа.

Відповідь. 142857.

Вказівка. Позначимо шукане число за x, тоді $x = 100000 + a$. Якщо в числі x одиницю переставити в кінець числа, то в отриманому числі y число a буде показувати число його десятків,тоді $y = 10a + 1$. За умовою: $10a + 1 = 3 \cdot (100000 + a)$, тому $7a = 299999$ і $a = 42857$. Тоді $x = 142857$

3.Розв'язати рівняння: $2(\cos^2 2017x - \sin^2 2017x) = 2^{2018x} + 2^{-2018x}$.

Відповідь. x=0

Вказівки. Перепишемо рівняння у вигляді $2\cos 4034x = 2^{2018x} + \frac{1}{2^{2018x}}$.

Оскільки ліва частина рівняння не перевищує 2, а права не менше ніж 2, то дане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} \cos 4034x = 1; \\ 2^{2018x} = 1. \end{cases}$.

Звідки x=0.

4. Доведіть нерівність: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 9$, a,b,c – додатні числа.

Доведення.

$$\cdot \left(\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}}{3}\right) \cdot \left(\frac{\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}}{3}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \frac{c}{a}} \sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \geq 9.$$

Що і треба було довести.

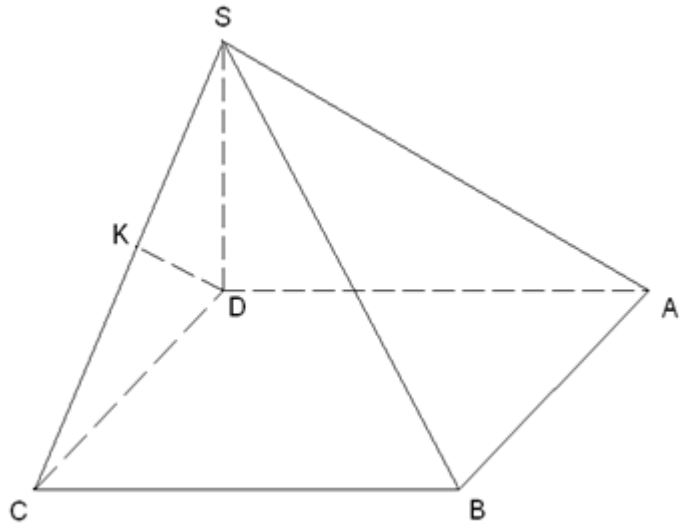
5.Основою піраміди є прямокутник $ABCD$, причому $AB=a$, $BC=b$. Бічне ребро SD перпендикулярне до площини основи і має довжину c. Знайти відстань між прямими AD і SB.

Відповідь. $\frac{ac}{\sqrt{a^2 + c^2}}$

Вказівки.

Нехай SABCD – дана піраміда, $SD \perp (ABC)$, $AD \perp SD$, $AD \perp DC \Rightarrow$ $AD \perp (SDC)$, D – точка перетину AD і (SDC). SC – проекція SB на площину (SDC). Проведемо $DK \perp SC$. Довжина відрізка DK - відстань між прямими

AD і SB, вона дорівнює $\frac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}$ з ΔSDC



.